2.2.1 Rovnice, ekvivalentní a důsledkové úpravy

Předpoklady:

Pedagogická poznámka: Tato hodina může být považována za zbytečnou, vždyť sepsání ekvivalentních úprav by netrvalo víc než deset minut. Přesto ji považuju za velmi důležitou, dokonce krásnou. Její pochopení, jednak umožní studentům samostatně rozhodovat o oprávněnosti úprav, které používají (nebo budou potřebovat použít) na úpravu rovnic (i nerovnic, jejich odlogaritmování nebo logaritmování, exponenciální nerovnice apod.) a jednak ukazuje hlubokou souvislost mezi zdánlivě nesouvisejícími věcmi: funkcemi a rovnicemi.
Na druhou stranu musím upozornit, že pro studenty tak moc zajímavá není. Zabývá se totiž příliš obecnými záležitostmi (a o obecné věci se studenti nezajímají), navíc na začátku dlouho trvá než se dostaneme k prvnímu příkladu a studenti by měli celou dobu dávat pozor.

Pedagogická poznámka: Když řeším rovnici pomocí úprav neustále zdůrazňuji (a zápis úprav je tak i připraven), že každá úprava znamená, že s čísly (s celými stranami) na obou stranách rovnice udělám stejnou věc, aby se pořád rovnala. Tento typ pohledu na rovnice není mezi studenty rozhodně běžný.
Pokud si sami nevšimnou, že děláme přesně stejné věci jako při vyjadřování neznámé, připomeňte jim to i s tím, že to není žádná podobnost nýbrž fakticky stejné řešení stejného problému.

Co znamená rovnice, například $3x-\frac{3}{2}=\frac{2x+5}{2}$?

Jde o rovnost dvou čísel zapsaných pomocí proměnné *x*. Za *x* dosazujeme různá čísla, tím získáváme různé hodnoty pro oba výrazy (fakticky určujeme hodnoty dvou funkcí). Hledáme taková *x*, aby rovnost platila (oba výrazy měly stejnou hodnotu).
Zkusíme třeba $x=1$.

Dosadíme: $3\cdot 1-\frac{3}{2}=\frac{2\cdot 1+5}{2}$

$\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$ Rovnost neplatí, zvolené *x* nebylo to pravé. Pokud nevymyslíme jiný postup řešení, čeká nás smutná budoucnost neustálého dosazování.

Nápad:

- $3x-\frac{3}{2}=\frac{2x+5}{2}$ - z této rovnice není vidět správné *x*.
- $x=3$ - z této rovnice to naopak vidí každý.

$\Rightarrow$ Upravíme rovnost tak, aby se její podstata nezměnila, ale *x* bylo lépe vidět (asi budeme hlavně zjednodušovat výrazy).

$3x-\frac{3}{2}=\frac{2x+5}{2} \quad /\cdot 2$ (oba výrazy zvětšíme 2 krát)

$2\left(3x-\frac{3}{2}\right)=2\left(\frac{2x+5}{2}\right) \quad /\cdot 2$

$6x-3=2x+5 \quad /+3$ (oba výrazy zvětšíme o tři)

$(6x-3)+3=(2x+5)+3$

$6x=2x+8 \quad /-2x$ (od obou výrazů odečteme neznámé číslo 2x)

$6x-2x=(2x+8)-2x$

$4x=8 \quad /:4$ (oba výrazy vydělíme 4)

$\frac{4x}{4}=\frac{8}{4}$

$x=2$ (teď už je vidět, které x je správné)

Vyzkoušíme, zda rovnost platí i v původním tvaru:

$L: 3x-\frac{3}{2}=3\cdot 2-\frac{3}{2}=\frac{9}{2}=4,5$

$P: \frac{2x+5}{2}=\frac{2\cdot 2+5}{2}=\frac{9}{2}=4,5$

$L=P$

Množinu všech řešení rovnice značíme K a na konci každého řešení rovnice píšeme $K=\{2\}$.

Bez úpravy by bylo nalezení x docela problém.
Jaké podmínky musí splňovat úpravy, které můžeme použít?
Nesmí změnit fakt rovnosti dvou čísel $\Rightarrow$

- Z čísel, která se rovnají, musí vyrobit čísla, která se rovnají.
- Z čísel, která se nerovnají, musí vyrobit čísla, která se nerovnají.

Můžeme přičítat 2?

$3=3$	$3\neq 1$
$3+2=3+2$	$3+2\neq 1+2$
$5=5$	$5\neq 3$

Asi můžeme.

Můžeme násobit -2?

$3=3$	$3\neq 1$
$3(-2)=3(-2)$	$3(-2)\neq 1(-2)$
$-6=-6$	$-6\neq -2$

Asi můžeme.

Př. 1: Pomocí analogických výpočtů rozhodni, zda násobení nulou splňuje podmínky kladené na úpravy rovnic.

Můžeme násobit 0?

$3=3$	$3\neq 1$
$3\cdot 0=3\cdot 0$	$3\cdot 0=1\cdot 0$
$0=0$	$0=0$

Násobit nulou nemůžeme. Z čísel, která se nerovnala, jsme získali stejná čísla.

Předchozí výpočty nejsou neprůstřelné. Víme určitě, že násobení nulou je špatné, ale co přičítání dvou? Nevyzkoušeli jsme všechna čísla, co když jsme netrefili ta, pro která to zkrachuje?
Zamyšlení: Přičítáme dvě k reálným číslům = z reálných čísel vyrábíme zase reálná čísla $\Rightarrow$ jde o funkci.
Jaká funkce zvětšuje reálná čísla o dvě?
Funkce $y = x + 2$. Splňuje funkce $y = x + 2$ naše podmínky pro úpravy rovnice?

- **Z čísel, která se rovnají, musí vyrobit čísla, která se rovnají.**
  Z čísel, která se rovnají (z jediné hodnoty x), musí vyrobit, čísla, která se rovnají (musí vyrobit jedinou hodnotu y).
  $\Rightarrow$ To je podmínka, kterou musí splňovat každá funkce.
- **Z čísel, která se nerovnají, musí vyrobit čísla, která se nerovnají.**
  Z čísel, která se nerovnají (z různých hodnot x), musí vyrobit čísla, která se nerovnají (musí vyrobit různá y).
  $\Rightarrow$ To je podmínka pro prostou funkci.

Funkce $y = x + 2$ je prostá $\Rightarrow$ přičítání dvou splňuje naše podmínky na úpravy rovnic.

Úpravy, které splňují naše podmínky, se nazývají **ekvivalentní**. **Ekvivalentním úpravám rovnic odpovídají prosté funkce.**

Pedagogická poznámka: Před zadáním následujícího příkladu jsem předpokládat, že studenti budou mít značné problémy s nacházením odpovídajících funkcí a zbytek příkladu bude hračkou. Pro mě šokující zkušeností byl fakt, že funkce hledali překvapivě snadno, ale zjistit zda jsou prosté byl nečekaný problém. Přes všechny příklady, které mají ohledně vlastností funkcí za sebou. Zkušenost jenom demonstruje, jak málo jsou studenti schopní si zapamatovat.

Př. 2: Najdi odpovídající funkce a s jejich pomocí rozhodni ekvivalentnost následujících úprav:
a) násobení 2 b) násobení –1 c) násobení 0 d) dělení 3

a) násobení 2
Hodnotu výrazů na obou stranách rovnice zvětšíme na dvojnásobek $\Rightarrow$ odpovídající funkce $y = 2x$ je prostá $\Rightarrow$ násobení 2 je ekvivalentní úprava.
b) násobení –1
Hodnotu výrazů na obou stranách rovnice vynásobíme -1 $\Rightarrow$ odpovídající funkce $y = -x$ je prostá $\Rightarrow$ násobení -1 je ekvivalentní úprava.
c) násobení 0
Hodnotu výrazů na obou stranách rovnice vynásobíme 0 $\Rightarrow$ odpovídající funkce $y = 0x = 0$ není prostá $\Rightarrow$ násobení 0 není ekvivalentní úprava (kvůli tomu, že má stejný výsledek dokonce pro všechna reálná čísla, je naprosto nepoužitelná).
d) dělení 3
Hodnotu výrazů na obou stranách rovnice vydělíme 3 $\Rightarrow$ odpovídající funkce $y = \frac{x}{3}$ je prostá $\Rightarrow$ dělení 3 je ekvivalentní úprava.

Jak je to s přičtením neznámé (dělali jsme $+2x$)?

Neznámá je nějaké číslo $\Rightarrow$ stejné jako přičítání libovolného čísla (jenom nevíme jakého) $\Rightarrow$ odpovídající funkce $y = x + b$. Nevíme hodnotu b, ale je to jedno, prosté jsou všechny. $\Rightarrow$ **Přičtení neznámé (nebo výrazu, který neznámou obsahuje) je ekvivalentní úprava.**

Jak je to s násobením neznámou?
Neznámá je nějaké číslo $\Rightarrow$ stejné jako násobení libovolným číslem (jenom nevíme jakým) $\Rightarrow$ odpovídající funkce $y = ax$. Nevíme hodnotu a, ale na ní záleží. Funkce $y = 0x$ není prostá, ostatní jsou. $\Rightarrow$ **Násobení neznámou (nebo výrazem, který neznámou obsahuje) je ekvivalentní úprava, pokud je hodnota neznámé (nebo výrazu, který neznámou obsahuje) různá od nuly** (budeme muset dělat podmínky).

Př. 3: Pomocí odpovídající funkce rozhodni ekvivalentnost úpravy: „dělení neznámou“.

Neznámá je nějaké číslo $\Rightarrow$ stejné jako dělení libovolným číslem (jenom nevíme jakým) $\Rightarrow$ odpovídající funkce $y = \frac{x}{a}$. Nevíme hodnotu a, ale na ní záleží, funkce $y = \frac{x}{0}$ neexistuje (nulou nelze dělit). $\Rightarrow$ **Dělení neznámou (nebo výrazem, který neznámou obsahuje) je ekvivalentní úprava, je-li hodnota neznámé (nebo výrazu, který neznámou obsahuje) různá od nuly.**

Př. 4: Sepiš nám zatím známé ekvivalentní úpravy.

Ekvivalentní úpravy rovnic jsou:

- **přičítání a odečítání reálného čísla,**
- **přičítání a odečítání neznámé (nebo výrazu obsahujícího neznámou),**
- **násobení reálným číslem kromě nuly,**
- **násobení neznámou (nebo výrazem obsahujícím neznámou), pokud je různá od nuly (nebo výraz je různý od nuly),**
- **dělení reálným číslem kromě nuly,**
- **dělení neznámou (nebo výrazem obsahujícím neznámou), pokud je různá od nuly (nebo výraz je různý od nuly).**

Shrnutí: Rovnice je zápisem rovnosti hodnot dvou výrazů. Při jejich řešení můžeme použít pouze takové úpravy, které tuto rovnost zachovávají.